FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mathematische Objekte: Komplexe Zahlen

Vorlesung

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Inhaltsübersicht

Themen:

- Quadratische Gleichungen und komplexe Lösungen
- Definition der komplexen Zahlen
- Real- und Imaginärteil
- Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division
- komplex konjugierte Zahl

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

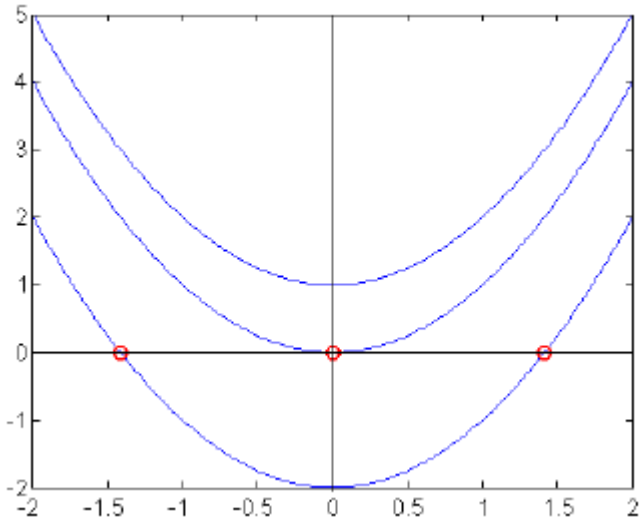
Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichung in Normalform: $x^2 + px + q = 0$

Lösung mit p-q-Formel: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Drei Möglichkeiten:

- zwei unterschiedliche Lösungen
- eine (doppelte) Lösung
- keine Lösungen



Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Quadratische Gleichungen

Beispiele: $x^2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2 = 0$

Lösungen: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\,\sqrt{2}$

➡ Können wir die Wurzel aus -1 ziehen, würden wir Lösungen finden!

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Quadratische Gleichungen

Definition 2.19 *Wir bezeichnen die Zahl i, die definiert ist durch*

$$i^2 = -1$$

als imaginäre Einheit. Sie gehört nicht zu den reellen Zahlen.

Bemerkung 2.20 *In der Elektrotechnik wird of j statt i verwendet, um Verwechslungen mit der Stromstärke i zu vermeiden. In der Mathematik und weiten Teilen der Physik ist jedoch die Bezeichnung i üblich.*

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Quadratische Gleichungen

Definition 2.19 *Wir bezeichnen die Zahl i, die definiert ist durch*

$$i^2 = -1$$

als imaginäre Einheit. Sie gehört nicht zu den reellen Zahlen.

Zurück zu den Beispielen:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^2 + 2 = 0$$

Lösungen: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$ und $x_{1,2} = \pm\sqrt{-2} = \pm\sqrt{-1}\,\sqrt{2}$

$$x_{1,2} = \pm i \qquad x_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{2}$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Quadratische Gleichungen

Weiteres Beispiel: $x^2 + 2x + 4 = 0$

Lösung via p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-4}$$
$$= -1 \pm \sqrt{-3}$$
$$= -1 \pm i\sqrt{3}$$

Wir erhalten allgemein Zahlen der Form:

$$z = a + i \cdot b$$

Realteil

Imaginärteil

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Definition

Definition 2.21 *Sei i die imaginäre Einheit und $a, b \in \mathbb{R}$, dann nennen wir eine Zahl z der Form*

$$z = a + i \cdot b$$

eine komplexe Zahl. Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet:

$$\mathbb{C} := \{a + i \cdot b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Definition 2.23 *Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + ib$. Dann definieren wir:*

$$\begin{aligned} Re(z) &:= a \quad \text{Realteil von } z \\ Im(z) &:= b \quad \text{Imaginärteil von } z\,. \end{aligned}$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Quadratische Gleichungen

Sie sind an der Reihe…

Lösen Sie die folgende quadratische Gleichung: $x^2 - 2x + 2 = 0$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Beispiele Real- und Imaginärteil

Sie sind an der Reihe…

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = -1 + 2i$$

$$z_2 = 2 + i$$

$$z_3 = -3 - 2i$$

$$z_4 = 4i$$

$$z_5 = 5$$

$$z_6 = 1 - i$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Eigenschaften

Wir haben gesehen, dass die reellen Zahlen eine Teilmenge der komplexen Zahlen bilden.

Allgemein gilt:

Korollar 2.22 *Es gilt*

$$\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Wozu komplexe Zahlen???

Mathematik:

Einfacher Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den Winkelfunktionen (sin und cos).

Physik:

Der Zusammenhang erlaubt eine einfache Behandlung von Schwingungsvorgängen, z.B. komplexe Brechnungszahlen in der Optik.

Elektrotechnik:

Elektrische und magnetische Felder werden durch komplexe Zahlen beschrieben.

Komplexe Größen erleichtern die Rechnungen bei Wechsel-spannungen (Zeigerdiagramme).

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Zusammenfassung

Addition und Subtraktion

Wir betrachten die folgenden beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 := a_1 + i \cdot b_1 \qquad \text{und} \qquad z_2 := a_2 + i \cdot b_2$$

Dann gilt…

Addition: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Subtraktion: $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

Sie sind an der Reihe…

Berechnen Sie:

$$(1 + 2i) + (-1 + 3i) = \ \ldots$$
$$(1 - i) + (2 - i) - (2 + i) = \ \ldots$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Zusammenfassung

Multiplikation

Wir betrachten die folgenden beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 := a_1 + i \cdot b_1 \qquad \text{und} \qquad z_2 := a_2 + i \cdot b_2$$

Dann gilt…

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + i \cdot (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)$

Sie sind an der Reihe…

Berechnen Sie:

$$(5 + i) \cdot (3 - i) = \ \ldots$$

Zusammenfassung

Division

Wir betrachten die folgenden beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 := a_1 + i \cdot b_1 \qquad \text{und} \qquad z_2 := a_2 + i \cdot b_2$$

Dann gilt…

Division:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Zusammenfassung

Division

Wir betrachten die folgenden beiden komplexen Zahlen:

$$z_1 := a_1 + i \cdot b_1 \qquad \text{und} \qquad z_2 := a_2 + i \cdot b_2$$

Dann gilt…

Division: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} \cdot$$

Sie sind an der Reihe…

Berechnen Sie:

$$\frac{5+i}{(3-i)} = \ldots$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Komplex konjugierte Zahl

Wir betrachten noch einmal die Division… $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}$

Hier haben wir mit $a_2 - ib_2$ erweitert, um einen reellen Nenner zu erhalten:

$$(a_2 + ib_2) \cdot (a_2 - ib_2) = a_2^2 + b_2^2 \in \mathbb{R}$$

Definition 2.25 *Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Dann bezeichnen wir mit*

$$z^* := a - ib$$

die zu z komplex konjugierte Zahl z^*.

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Komplex konjugierte Zahl

Sie sind an der Reihe...

Bestimmen Sie die komplex konjugierte Zahl:

$$z_1 = -1 + i \quad z_2 = i \quad z_3 = 2 - 3i$$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Komplex konjugierte Zahl

Satz 2.26 *Es seien $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt:*

$$(z+w)^* = z^* + w^* \quad (z \cdot w)^* = z^* \cdot w^* \quad \left(\frac{z}{w}\right)^* = \frac{z^*}{w^*}$$

$$Re(z) = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad Im(z) = \frac{1}{2i}(z - z^*)\,.$$

Beispiel: $z = 2 + i$ $w = 1 - 2i$

Komplexe Zahlen: Einführung und Grundrechenarten

Komplex konjugierte Zahl

Sie sind an der Reihe…

Wir erhalten also einen reellen Nenner, wenn wir die komplexe Zahl im Nenner mit ihrer komplex konjugierten Zahl multiplizieren.

Beispiele:

$$\frac{1}{1-i} =$$

$$\frac{1}{2+3i} =$$

$$\frac{1}{i} =$$